



УДК: 532.5  
MSC 2010: 37J60

## Две неголономные интегрируемые связки твердых тел

А. В. Борисов, И. С. Мамаев

В работе рассматриваются две новые интегрируемые системы, восходящие к Чаплыгину, которые описывают качение по плоскости сферической оболочки с шаром или гироскопом Лагранжа внутри. Приведены все необходимые первые интегралы и инвариантная мера, указано сведение к квадратурам.

Ключевые слова: неголономная связь, интегрируемость, инвариантная мера, гироскоп, квадратура, связка твердых тел

### Содержание

<b>Введение</b>	560
<b>1. Система Чаплыгина</b>	560
1.1. Уравнения движения	560
1.2. Инвариантная мера, первые интегралы, гироскопическая функция	562
1.3. Сферическая оболочка с маятником	564
<b>2. Сферическая оболочка с волчком Лагранжа</b>	564
2.1. Уравнения движения	564

Получено 26 августа 2011 года  
После доработки 14 сентября 2011 года

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских образовательных учреждениях ВПО (дог. № 11.G34.31.0039), Федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России», мероприятие 1.1. «Научно-образовательный центр «Регулярная и хаотическая динамика» (ГК № 02.740.11.0195), мероприятие 1.5 «Топология и механика» (ГК № 14.740.11.0876).

Борисов Алексей Владимирович  
[borisov@rcd.ru](mailto:borisov@rcd.ru)

Мамаев Иван Сергеевич  
[matmaev@rcd.ru](mailto:matmaev@rcd.ru)

Институт компьютерных исследований  
Удмуртский государственный университет  
426034, Россия, г. Ижевск, ул. Университетская, д. 1



2.2. Инвариантная мера, первые интегралы и гироскопическая функция . . . . .	566
3. Дискуссия . . . . .	566

## Введение

В связи с созданием управляемых устройств, использующих для передвижения один или несколько шаров (см., например, [3, 4, 7–10, 12–14]), в последнее время возрос интерес к различным моделям (в частности, к неголономным) качения сферических оболочек, в том числе в случае, когда внутри могут быть установлены дополнительные механизмы. Классическая задача о качении динамически несимметричного уравновешенного шара Чаплыгина хорошо изучена [11]. Более новые задачи, связанные с качением шара Чаплыгина по сфере, недавно изучались в ряде работ [1, 5, 6].

Здесь мы рассмотрим две новые интегрируемые системы, также восходящие к Чаплыгину. В работе Чаплыгина [2], посвященной в основном обобщенным условиям существования линейных по скоростям интегралов в задачах, связанных с движением систем шаров (которые, кстати, до сих пор не очень поняты), Чаплыгин подробно разбирает две задачи. Первая из них относится к системе, состоящей из сферической геометрически и динамически симметричной оболочки, внутри которой катается однородный шар, при этом сама оболочка катается по горизонтальной плоскости (качение происходит без проскальзывания), см. рис. 1. Интегрируемость этой системы была установлена Чаплыгиным при помощи явного сведения к квадратурам. Хотя метод сведения к квадратурам, использованный при этом, довольно естественный (он применяется также в задаче о качении тела вращения по плоскости), по нашему мнению, при решении этой задачи Чаплыгин допустил некоторые неточности, что привело к очень громоздким конечным выражениям, которые не поддаются верификации, и кроме того он не указал явно один из дополнительных интегралов. Кстати, эти результаты остановили и самого Чаплыгина, так как обычно после получения аналитического решения он пытался прояснить какие-либо его динамические и геометрические аспекты. Мы даем новый анализ этой системы, указываем все необходимые интегралы и приводим задачу к квадратурам.

Вторая задача, проинтегрированная Чаплыгиным полностью, описывает качение по плоскости оболочки со сферическим маятником внутри. Как мы показываем в этой работе, интегрируемой оказывается и более общая система — гироскоп Лагранжа внутри катящейся сферической оболочки. Она также интегрируется при помощи обобщения векторных интегралов Чаплыгина и пары дополнительных линейных интегралов.

## 1. Система Чаплыгина

### 1.1. Уравнения движения

Рассмотрим катающуюся по горизонтальной плоскости систему, состоящую из двух тел: первое — сферическая оболочка, представляющая собой правильный шар, внутри которого имеется сферическая полость, такая, что ее центр совпадает с центром шара, второе — шар, помещенный в сферическую полость оболочки (см. рис. 1). Оба тела предполагаются уравновешенными (т. е. центр масс совпадает с геометрическим центром) и динамически симметричными (т. е. тензор инерции шаровой), их моменты инерции обозначим  $I$  и  $i$  соответственно.



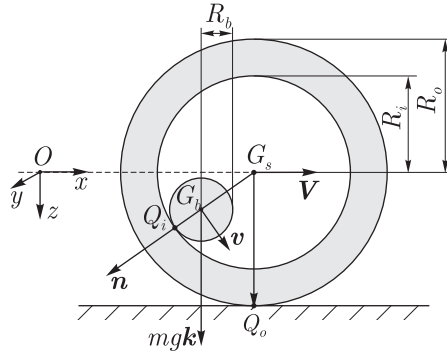


Рис. 1

Выберем неподвижную систему координат  $Oxyz$  с началом в горизонтальной плоскости, проходящей через центр оболочки, и осью  $Oz$ , направленной вертикально вниз (вдоль поля тяжести), запишем уравнения изменения углового момента и импульса тел. Для оболочки изменение момента импульса относительно ее центра  $G_s$  и изменение импульса описываются уравнениями

$$I\dot{\Omega} = R_o \mathbf{k} \times \mathbf{N}_o + R_i \mathbf{n} \times \mathbf{N}_i, \quad M\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{N}_o + \mathbf{N}_i + Mg\mathbf{k}, \quad (1.1)$$

где  $\Omega$ ,  $\mathbf{V}$  — угловая скорость и скорость центра  $G_s$  оболочки,  $M$  — масса оболочки,  $R_o$ ,  $R_i$  — ее внутренний и внешний радиусы,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$  — единичный вектор вдоль поля тяжести,  $\mathbf{N}_o$ ,  $\mathbf{N}_i$  — силы реакции, действующие на оболочку в точках контакта с плоскостью  $Q_o$  и шаром  $Q_i$ ,  $g$  — ускорение поля тяжести. Аналогичные уравнения для шара относительно его центра  $G_b$  имеют вид

$$I\dot{\omega} = R_b \mathbf{n} \times (-\mathbf{N}_i), \quad m\dot{\mathbf{v}} = -\mathbf{N}_i + mg\mathbf{k}, \quad (1.2)$$

здесь  $\omega$ ,  $\mathbf{v}$  — угловая скорость и скорость центра  $G_b$  шара,  $m$  — масса шара,  $R_b$  — его радиус.

Будем предполагать, что в точках соприкосновения  $Q_o$  и  $Q_i$  проскальзывание отсутствует, т. е. скорость точки контакта  $Q_o$  равна нулю:

$$\mathbf{V} + \Omega \times R_o \mathbf{k} = 0, \quad (1.3)$$

а в точке  $Q_i$  скорости соприкасающихся элементов оболочки и шара совпадают:

$$\mathbf{V} + \Omega \times R_i \mathbf{n} = \mathbf{v} + \omega \times R_b \mathbf{n}. \quad (1.4)$$

Эти уравнения описывают (неголономные) связи, наложенные на систему. Пользуясь ими, исключим из уравнений (1.1), (1.2) силы реакции; это позволит получить замкнутую систему уравнений, описывающих эволюцию векторов  $\Omega$ ,  $\omega$  и  $\mathbf{n}$ .

Согласно определению вектора  $\mathbf{n}$  (см. рис. 1), имеем  $\mathbf{v} - \mathbf{V} = (R_i - R_b)\dot{\mathbf{n}}$ , и из уравнения (1.4) получаем

$$(R_i - R_b)\dot{\mathbf{n}} = (R_i \Omega - R_b \omega) \times \mathbf{n}.$$

Выразим  $\mathbf{N}_o$  из второго уравнения в системе (1.1) и  $\dot{\mathbf{V}}$  из уравнения (1.3), откуда находим

$$R_o \mathbf{k} \times \mathbf{N}_o = R_o \mathbf{k} \times (-\mathbf{N}_i - Mg\mathbf{k} - MR_o \dot{\Omega} \times \mathbf{k}).$$

Это позволяет представить уравнения для  $\Omega$ ,  $\omega$  в форме

$$I\dot{\Omega} + MR_o^2 \mathbf{k} \times (\dot{\Omega} \times \mathbf{k}) = \mathbf{J}\dot{\Omega} = \mathbf{a} \times \mathbf{N}_i, \quad i\dot{\omega} = -R_b \mathbf{n} \times \mathbf{N}_i, \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{J} = \text{diag}(I + MR_o^2, I + MR_o^2, I)$ ,  $\mathbf{a} = R_i \mathbf{n} - R_o \mathbf{k} = \overrightarrow{Q_o Q_i}$  — вектор, соединяющий точки контакта, а сила реакции  $\mathbf{N}_i$  может быть найдена из второго уравнения (1.2) и связи (1.4):

$$\mathbf{N}_i = -m\dot{\mathbf{v}} + mg\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \Omega \times \mathbf{a} - \omega \times R_b \mathbf{n}. \quad (1.6)$$

Выполняя дифференцирование  $\mathbf{v}$  и упрощая, окончательно получим:

*Уравнения движения оболочки и шара, катающихся без проскальзывания по плоскости, могут быть записаны в форме*

$$\begin{aligned} \mathbf{J}\dot{\Omega} + m\mathbf{a} \times (\dot{\Omega} \times \mathbf{a}) - mR_b \mathbf{a} \times (\dot{\omega} \times \mathbf{n}) &= -m\mathbf{a} \times ((R_i \Omega - R_b \omega) \times \dot{\mathbf{n}}) + mgR_i \mathbf{n} \times \mathbf{k}, \\ i\dot{\omega} + mR_b^2 \mathbf{n} \times (\dot{\omega} \times \mathbf{n}) - mR_b \mathbf{n} \times (\dot{\Omega} \times \mathbf{a}) &= mR_b \mathbf{n} \times ((R_i \Omega - R_b \omega) \times \dot{\mathbf{n}}) - mgR_b \mathbf{n} \times \mathbf{k}, \\ (R_i - R_b)\dot{\mathbf{n}} &= (R_i \Omega - R_b \omega) \times \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

где  $\mathbf{a} = R_i \mathbf{n} - R_o \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ . Траектория центра оболочки  $\mathbf{r}_s(t)$  (точки контакта) находится с помощью квадратуры

$$\dot{\mathbf{r}}_s = \mathbf{V} = R_o \mathbf{k} \times \Omega. \quad (1.8)$$

## 1.2. Инвариантная мера, первые интегралы, гироскопическая функция

Уравнения (1.7) обладают инвариантной мерой  $\rho d\Omega d\omega d\mathbf{n}$ , плотность которой на поверхности уровня геометрического интеграла  $\mathbf{n}^2 = 1$  определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 \sqrt{\rho_2}, \\ \rho_1(n_3) &= \frac{I + MR_o^2 + m_e(R_i - R_o)^2}{m_e R_o^2} + \frac{2R_i}{R_o}(1 - n_3) + \frac{mR_b^2}{i}(1 - n_3^2), \\ \rho_2(n_3) &= \frac{I + MR_o^2 + m_e(R_i - R_o)^2}{m_e R_o^2} + \frac{2R_i}{R_o}(1 - n_3) + \frac{MR_i^2}{I}(1 - n_3^2), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где  $m_e = \frac{im}{i + mR_b^2}$  — величина, которую по аналогии с небесной механикой назовем приведенной массой шара.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если обозначить совокупность угловых скоростей через вектор  $\mathbf{w} = (\Omega, \omega)$ , то первые шесть уравнений системы (1.7) записываются в форме

$$\mathbf{G}\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{b}(\mathbf{w}, \mathbf{n}),$$

где  $\mathbf{G}$  —  $6 \times 6$ -матрица, зависящая от  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  — шестимерный вектор. Оказывается, что

$$\det \mathbf{G} = \lambda \rho_1 \rho_2,$$

где  $\lambda$  — некоторая константа.

Уравнения движения (1.7) допускают очевидные первые интегралы:

$$\begin{aligned} \text{геометрический} \quad \mathbf{n}^2 &= 1, \\ \text{энергия} \quad E &= \frac{1}{2}(M\mathbf{V}^2 + I\Omega^2 + m\mathbf{v}^2 + i\omega^2) - mg(R_i - R_b)(\mathbf{k}, \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (1.10)$$



где  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{v}$  выражаются из уравнений связей (1.3), (1.4) по формулам

$$\mathbf{V} = R_o \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{a} - \boldsymbol{\omega} \times R_b \mathbf{n}.$$

Кроме этого, уравнения (1.7) обладают также векторным интегралом

$$\mathbf{K} = \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} + \frac{R_i}{R_b} i \boldsymbol{\omega} + m R_o \mathbf{v} \times \mathbf{k}, \quad (1.11)$$

линейным по угловым скоростям  $\boldsymbol{\omega}$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$ . (Установить существование этого интеграла проще всего, если воспользоваться уравнениями (1.5) и (1.6).)

Помимо этих трех, имеется еще два линейных по угловым скоростям интеграла, которые имеют вид

$$\begin{aligned} F_1 &= (\mathbf{J} \boldsymbol{\Omega}, R_i \mathbf{n} - R_o \mathbf{k}) - I R_b (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) - M R_o R_i (\mathbf{v} \times \mathbf{k}, \mathbf{n}) + \frac{M R_o R_i}{m R_b} (i \boldsymbol{\omega}, \mathbf{k}), \\ F_2 &= (R_i \boldsymbol{\Omega} - R_b \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) \sqrt{\rho_2}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Существование векторного интеграла  $\mathbf{K}$  установил С. А. Чаплыгин [2], который рассматривал наиболее общие механические системы, обладающие подобными векторными интегралами, линейными по скоростям. Данную систему Чаплыгин разобрал как один из простейших (и, по-видимому, наиболее содержательных) примеров таких систем.

Помимо общих интегралов (1.10), (1.11), Чаплыгин нашел для данной конкретной системы интеграл  $F_1$  (но не указал интеграл  $F_2$  и меру) и предпринял попытку проинтегрировать систему в явном виде с помощью различных подстановок, которые привели к сложным и запутанным выражениям (очевидно, ошибочным).

Таким образом, система из девяти уравнений (1.7) допускает семь первых интегралов и инвариантную меру и, следовательно, является интегрируемой (согласно теореме Эйлера – Якоби). Кроме того, на фиксированном уровне первых интегралов

$$\mathcal{M}_{\kappa, \chi} = \{(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) \mid n^2 = 1, \mathbf{K} = \boldsymbol{\kappa}, F_1 = \chi_1, F_2 = \chi_2\}$$

интеграл энергии представляется в форме

$$\begin{aligned} E &= \frac{\tilde{i}}{2} \frac{\rho_1 \dot{n}_3^2}{1 - n_3^2} - mg(R_i - R_b)n_3 + U_*(n_3) + \frac{1}{2} \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{I + i R_i^2 / R_b^2 + (m + M) R_o^2}, \\ \tilde{i} &= i \frac{m R_o^2 (R_i^2 / R_b^2 - 1)}{I + i R_i^2 / R_b^2 + (M + m) R_o^2}, \\ U_*(n_3) &= A_0 \chi_1^2 + A_1 \chi_1 \kappa_3 + A_2 \kappa_3^2 + \frac{B_0}{\sqrt{\rho_2}} \chi_1 \chi_2 + \frac{B_1}{\sqrt{\rho_2}} \kappa_3 \chi_2 + \frac{C_0}{\rho_2} \chi_2^2, \end{aligned}$$

где  $A_k$  — квадратичные по  $n_3$  полиномы,  $B_k$  — кубичные,  $C_0$  — четвертой степени, их коэффициенты суть довольно громоздкие функции параметров системы  $I, i, M, \dots$ , поэтому мы их здесь не приводим (они могут быть легко найдены при помощи любой системы аналитических вычислений Maple, Mathematica, и т. п.). Выражая на уровне энергии

$$E = \frac{1}{2} \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}{I + i R_i^2 / R_b^2 + (m + M) R_o^2} + h$$

производную  $\dot{n}_3$ , получим квадратуру

$$\dot{n}_3^2 = \frac{2(1 - n_3^2)}{\tilde{i}\rho_1(n_3)} \left( h + mg(R_i - R_o)n_3 - U_*(n_3) \right), \quad (1.13)$$

где в скобках стоит гироскопическая функция системы.

### 1.3. Сферическая оболочка с маятником

Имеется любопытный предельный случай данной системы Чаплыгина, который оказывается эквивалентным задаче о качении оболочки, в центре которой закреплен сферический маятник. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим формальную задачу, в которой внутренний шар обкатывает (без проскальзывания) с внешней стороны некоторую сферическую поверхность, закрепленную в центре оболочки (рис. 2). Поскольку при этом вектор из точки контакта  $Q_i$  в центр шара  $G_b$  меняет направление, то в уравнениях (1.7) необходимо сделать замену  $R_b \rightarrow -R_b$ . Если в получившейся системе сделать предельный переход  $R_i \rightarrow 0$ , то получим систему, в которой сохраняются интегралы (1.10), (1.11), а второй из интегралов (1.12) примет вид

$$(\omega, n) = \text{const.}$$

На нулевом уровне этого интеграла  $(\omega, n) = 0$  получится система, эквивалентная шару со сферическим маятником.

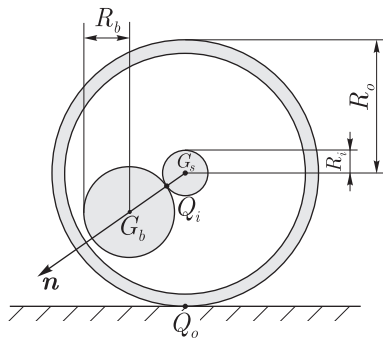


Рис. 2

Любопытно, что первый из интегралов (1.12) вырождается, но вместо него возникает интеграл

$$\omega_3 = \text{const.}$$

Здесь мы не будем подробно анализировать эту задачу, так как в следующем разделе рассматривается более общая система, содержащая данную как частный случай.

**ЗАМЕЧАНИЕ.** Сам Чаплыгин также рассмотрел задачу об оболочке со сферическим маятником, используя исходную конфигурацию тел (см. рис. 1), но предполагая, что внутренняя поверхность оболочки абсолютно гладкая. В этом случае он явно указал все необходимые интегралы и гироскопическую функцию.

## 2. Сферическая оболочка с волчком Лагранжа

### 2.1. Уравнения движения

Рассмотрим теперь подробнее более общую систему, которая не может быть получена как частный или предельный случай системы Чаплыгина, а именно — сферическую оболочку, катающуюся без проскальзывания по горизонтальной плоскости, при условии, что в центре оболочки закреплен осесимметричный волчок (см. рис. 3). Подобного рода задачи встречаются в приложениях при управлении роботами-шарами. Наиболее интересным здесь является проект, связанный с созданием шарового робота для инопланетных миссий (например, марсохода, [14]).



Как и в предыдущем случае выберем неподвижную систему координат  $Oxyz$ , с горизонтальной плоскостью, проходящей через центр шара. Обозначим через  $G_s$  — центр масс оболочки, а через  $G_t$  — центр масс волчка, и расстояние между ними  $R_t = |G_s G_t|$ . Предполагая, что в системе главных осей волчка его тензор инерции имеет вид  $\hat{\mathbf{I}} = \text{diag}(i, i, i + j)$ , кинетическая энергия системы может быть записана в форме

$$T = \frac{1}{2}(M \mathbf{V}^2 + I \Omega^2) + \frac{1}{2}(m \mathbf{v}^2 + i \omega^2 + j(\omega, \mathbf{n})^2),$$

где  $\mathbf{V}$ ,  $\Omega$  — скорость центра и угловая скорость оболочки,  $M$ ,  $I$  — ее масса и момент инерции,  $\mathbf{v}$ ,  $\omega$  — скорость центра масс и угловая скорость волчка, а  $m$  — его масса.

Изменение углового момента относительно точки  $G_s$  и импульса оболочки описывается уравнениями

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \Omega}\right)^{\cdot} = I \dot{\Omega} = R_o \mathbf{k} \times \mathbf{N}_o, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{V}}\right)^{\cdot} = M \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{N}_o + \mathbf{N}_t + M g \mathbf{k},$$

где  $\mathbf{N}_o$ ,  $\mathbf{N}_t$  — силы реакции, действующие на оболочку в точке контакта  $Q_o$  и точке крепления волчка  $G_s$ . Для волчка относительно его центра масс  $G_t$  имеем

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \omega}\right)^{\cdot} = (i \omega + j(\omega, \mathbf{n}) \mathbf{n})^{\cdot} = R_t \mathbf{n} \times \mathbf{N}_t, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{v}}\right)^{\cdot} = m \dot{\mathbf{v}} = m g \mathbf{k} - \mathbf{N}_t.$$

Из условия нераскальзывания в точке контакта  $Q_o$

$$\mathbf{V} = R_o \mathbf{k} \times \Omega,$$

в то время как скорость центра масс волчка определяется соотношением

$$\mathbf{v} = \mathbf{V} + R_t \omega \times \mathbf{n} = R_o \mathbf{k} \times \Omega + R_t \omega \times \mathbf{n}.$$

Эволюция вектора  $\mathbf{n}$  находится из уравнения  $R_t \dot{\mathbf{n}} = \mathbf{v} - \mathbf{V}$ :

$$\dot{\mathbf{n}} = \omega \times \mathbf{n}.$$

Пользуясь этими соотношениями, а также тем, что имеется интеграл  $(\omega, \mathbf{n}) = \text{const}$ , как в системе Чаплыгина, мы можем исключить силы реакции  $\mathbf{N}_o$ ,  $\mathbf{N}_t$ , окончательно получим:

Уравнения движения сферической оболочки с осесимметричным волчком, закрепленным в геометрическом центре оболочки, представляются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{J} \dot{\Omega} + m R_o^2 \mathbf{k} \times (\dot{\Omega} \times \mathbf{k}) - m R_o R_t \mathbf{k} \times (\dot{\omega} \times \mathbf{n}) &= m R_o R_t \mathbf{k} \times (\omega \times \mathbf{n}), \\ i \dot{\omega} - m R_t^2 \mathbf{n} \times (\dot{\omega} \times \mathbf{n}) - m R_o R_t \mathbf{n} \times (\dot{\Omega} \times \mathbf{k}) &= \\ &= -j(\omega, \mathbf{n}) \dot{\mathbf{n}} - m R_t^2 \mathbf{n} \times (\omega \times \dot{\mathbf{n}}) + m g R_t \mathbf{n} \times \mathbf{k}, \\ \dot{\mathbf{n}} &= \omega \times \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $\mathbf{J} = \text{diag}(I + M R_o^2, I + M R_o^2, I)$ ,  $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ . При этом траектория точки контакта оболочки и плоскости также определяется уравнением (1.8).

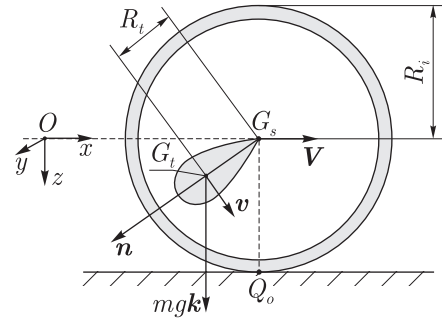


Рис. 3

## 2.2. Инвариантная мера, первые интегралы и гироскопическая функция

Для сокращения записи формул введем обозначения

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= I + (M + m)R_o^2, \quad \mathbf{J}_s = \text{diag}(\tilde{I}, \tilde{I}, I), \\ \mu &= \frac{j\tilde{I} - mR_t^2(I + mR_o^2)}{i\tilde{I} + mR_t^2(I + mR_o^2)}.\end{aligned}$$

Инвариантная мера  $\rho d\boldsymbol{\Omega} d\boldsymbol{\omega} d\mathbf{n}$  уравнений (2.1) имеет плотность вида

$$\rho(n_3) = \frac{(i + mR_t^2)\tilde{I}}{m^2 R_t^2 R_o^2} - n_3^2.$$

Как и в предыдущем случае, эта система допускает семь первых интегралов:

геометрический	$\mathbf{n}^2 = 1,$
энергия	$E = \frac{1}{2}(M \mathbf{V}^2 + I \boldsymbol{\Omega}^2) + \frac{1}{2}(m \mathbf{v}^2 + i \boldsymbol{\omega}^2 + j(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})^2) - mgR_t(\mathbf{n}, \mathbf{k}),$
векторный интеграл Чаплыгина	$\mathbf{K} = \mathbf{J} \boldsymbol{\Omega} + mR_o \mathbf{v} \times \mathbf{k},$
линейные интегралы	$F_1 = \omega_3 + \mu(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})n_3,$
	$F_2 = (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}),$

где

$$\mathbf{V} = R_o \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = R_o \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k} + R_t \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{n}.$$

На уровне первых интегралов

$$\mathcal{M}_{\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\chi}} = \{(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) \mid n^2 = 1, \mathbf{K} = \boldsymbol{\kappa}, F_1 = \chi_1, F_2 = \chi_2\}$$

энергия системы представляется в форме

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{J}_s^{-1} \boldsymbol{\kappa}) + \frac{m^2 R_o^2 R_t^2}{2\tilde{I}} \frac{\rho(n_3) \dot{n}_3^2}{1 - n_3^2} + U_{\boldsymbol{\chi}}(n_3) - mgR_t n_3, \\ U_{\boldsymbol{\chi}} &= \frac{1}{2(1 - n_3^2)} \left[ \left( i + \frac{mR_t^2(I + MR_o^2)}{\tilde{I}} \right) \chi_1^2 - 2(i + j)n_3 \chi_1 \chi_2 + (i + j)(1 + \mu n_3^2) \chi_2^2 \right].\end{aligned}$$

Таким образом, на фиксированном уровне интеграла энергии

$$E = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\kappa}, \mathbf{J}_s^{-1} \boldsymbol{\kappa}) + h$$

эволюция  $n_3$  описывается уравнением

$$\dot{n}_3^2 = \frac{2\tilde{I}(1 - n_3^2)}{m^2 R_o^2 R_t^2 \rho(n_3)} \left( h + mgR_t n_3 - U_{\boldsymbol{\chi}}(n_3) \right),$$

где в скобках стоит гироскопическая функция рассматриваемой системы.

## 3. Дискуссия

В заключение укажем некоторые задачи, которые могут быть решены на основе результатов, полученных в данной работе.





1. Вследствие того, что интегрируемость сохраняется и при внешнем обкате шара (см. рис. 4), это можно использовать для полного анализа устойчивости (стабилизации) вращения и качения шара на вершине оболочки. При этом оболочка может также двигаться. (Любопытно, что подобного рода системы часто используются в цирковых представлениях, где их равновесие обеспечивается мастерством артистов.)

2. Системы, описанные в этой работе, находят достаточно широкое применение в управлении, подробный список литературы содержится в [9]. Используя их интегрируемость, можно построить простейшие устойчивые решения этих систем, позволяющие конструктивно решать различные задачи управления.

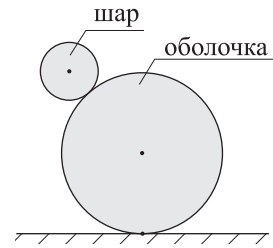


Рис. 4

## Список литературы

- [1] Борисов А. В., Килин А. А., Мамаев И. С. Обобщение преобразования Чаплыгина и явное интегрирование шарового подвеса // *Нелинейная динамика*, 2011, т. 7, № 2, с. 313–338.
- [2] Чаплыгин С. А. О некотором возможном обобщении теоремы площадей с применением к задаче о катании шаров // *Собр. соч.: Т. 1 / С. А. Чаплыгин. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 26–56.*
- [3] Alves J., Dias J. Design and control of a spherical mobile robot // *J. Systems and Control Engineering*, 2003, vol. 217, pp. 457–467.
- [4] Bhattacharya S., Agrawal S.K. Design, experiments and motion planning of a spherical rolling robot // *Proc. of the IEEE Internat. Conf. on Robotics and Automation (San Francisco, CA, April 2000)*, pp. 1207–1212.
- [5] Borisov A. V., Kilin A. A., Mamaev I. S. Rolling of a homogeneous ball over a dynamically asymmetric sphere // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2011, vol. 16, no. 5, pp. 465–483.
- [6] Borisov A. V., Fedorov Yu. N., Mamaev I. S. Chaplygin ball over a fixed sphere: An explicit integration // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 6, pp. 557–571.
- [7] Camicia C., Conticelli F., Bicchi A. Nonholonomic kinematics and dynamics of the sphericle // *Proc. of the 2000 IEEE/RSJ Internat. Conf. on Intelligent Robots and Systems*, 2000, pp. 805–810.
- [8] Chung W. *Nonholonomic manipulators*. (Springer Tracts in Advanced Robotics, vol. 13.) Berlin: Springer, 2004. 114 pp.
- [9] Crossley V. A. *A literature review on the design of spherical rolling robots*. Pittsburgh, PA, 2006, 6 pp.
- [10] Goncharenko I., Svinin M., Hosoe S. Dynamic model, haptic solution, and human-inspired motion planning for rolling-based manipulation // *J. of Computing and Information Science in Engineering*, 2009, vol. 9, no. 1, 011004, 10 pp.
- [11] Kilin A. A. The dynamics of Chaplygin ball: The qualitative and computer analysis // *Regul. Chaotic Dyn.*, 2001, vol. 6, no. 3, pp. 291–306.
- [12] Michaud F., Caron S. Roball, the rolling robot // *Autonomous Robots*, 2002, vol. 12, pp. 211–222.
- [13] Mukherjee R., Minor M. A., Pukrushpan J. T. Motion planning for a spherical mobile robot: Revisiting the classical ball-plate problem // *J. Dyn. Syst. Meas. Control*, 2002, vol. 124, pp. 502–511.
- [14] Wilson J. L., Mazzoleni A. P., DeJarnette F. R., Antol J., Hajos G. A., Strickland C. V. Design, analysis, and testing of Mars tumbleweed rover concepts // *J. of Spacecraft and Rockets*, 2008, vol. 45, no. 2, pp. 370–382.

## Two non-holonomic integrable systems of coupled rigid bodies

Alexey V. Borisov<sup>1</sup>, Ivan S. Mamaev<sup>2</sup>

<sup>1,2</sup>Institute of Computer Science,  
Udmurt State University  
Universitetskaya 1, Izhevsk, 426034 Russia  
<sup>1</sup>borisov@rcd.ru, <sup>2</sup>mamaev@rcd.ru

The paper considers two new integrable systems due to Chaplygin, which describe the rolling of a spherical shell on a plane, with a ball or Lagrange's gyroscope inside. All necessary first integrals and an invariant measure are found. The reduction to quadratures is given.

MSC 2010: 37J60

Keywords: non-holonomic constraint, integrability, invariant measure, gyroscope, quadrature, coupled rigid bodies

Received August 26, 2011, accepted September 14, 2011

Citation: *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, 2011, vol. 7, no. 3, pp. 559–568 (Russian)

